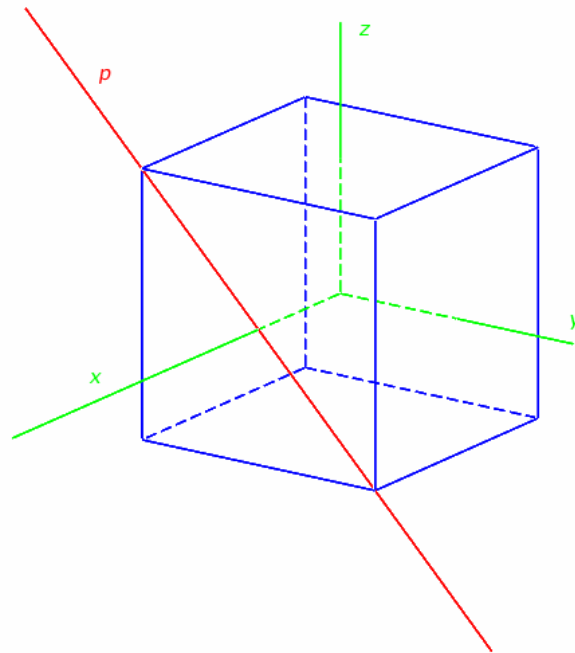


Dynamika



Homogenní krychle o hmotnosti m a délce hrany a má v centrálním souřadnicovém systému (x, y, z) matici setrvačnosti

$$\mathbf{I} = \frac{ma^2}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Určete její moment setrvačnosti J_p k přímce p , která je úhlopříčkou strany krychle v rovině $x = \frac{a}{2}$ podle obrázku.

Řešení

Nejprve posuneme souřadnicový systém (x, y, z) ve směru osy x o délku $\frac{a}{2}$, takže vektor posunutí je

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Odpovídající matice Steinerových členů je

$$\mathbf{D} = m \begin{bmatrix} Y^2 + Z^2 & -XY & -XZ \\ -YX & Z^2 + X^2 & -YZ \\ -ZX & -ZY & X^2 + Y^2 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2}{4} \end{bmatrix} = \frac{ma^2}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

takže matice setrvačnosti v posunutém souřadnicovém systému je

$$\mathbf{I}' = \mathbf{I} + \mathbf{D} = \frac{ma^2}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{ma^2}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{ma^2}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

Pro výpočet J_p nyní použijeme vzorec

$$J_p = (\mathbf{p}^0)^T \mathbf{I}' \mathbf{p}^0,$$

kde \mathbf{p}^0 je jednotkový vektor přímky p . V daném případě je

$$\mathbf{p}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix},$$

takže

$$J_p = \frac{ma^2}{6} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{5}{12} ma^2.$$