Kinematika

Zadání

Bod A se pohybuje danou konstantní rychlostí v po křivce p splňující rovnici $p : y^2 - k.x = 0$. Určete závislosti kinematických veličin bodu A ($\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$) na souřadnici x.

Řešení

Vektor polohy má dvě složky, x a y, kde x je v našem případě parametr. Zbývá tedy vyjádřit y jako funkci $y(x)$. Toho docílíme jednoduchou úpravou rovnice přímky p.

$$\begin{aligned} y^2 - kx &= 0, && (1)\\ y^2 &= kx, && (2)\\ y &= \pm\sqrt{kx}. && (3) \end{aligned}$$

Vektor polohy bodu A je tedy:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \pm\sqrt{kx} \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Vektor rychlosti $\vec{v}$ má složky $\dot{x}$ a $\dot{y}$. Zároveň ze zadání víme, že jeho velikost je konstantní. Derivací podle času a následnou úpravou rovnice (2) dostaneme vztah mezi $\dot{x}$ a $\dot{y}$,

$$\begin{aligned} 2y\dot{y} &= k\dot{x}, && (5)\\ \dot{y} &= \frac{k\dot{x}}{2y}. && (6) \end{aligned}$$

Zadanou velikost vektoru rychlosti $\vec{v}$ lze vyjádřit jako

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}. \qquad (7)$$

Po dosazení z rovnic (6) a (2) a následnou úpravou dostaneme vztah pro výpočet $\dot{x}$.

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\dot{x}^2 + \frac{k^2\dot{x}^2}{4y^2}}, && (8)\\ v &= \sqrt{\dot{x}^2 + \frac{k^2\dot{x}^2}{4kx}}, && (9)\\ v^2 &= \dot{x}^2\left(1 + \frac{k}{4x}\right), && (10)\\ \dot{x} &= \frac{\pm v}{\sqrt{\left(1 + \frac{k}{4x}\right)}}. && (11) \end{aligned}$$

Dosazením vztahů z rovnic (11) a (3) do rovnice (6) získáme zbývající složku vektoru rychlosti $\dot{y}$.

$$\dot{y} = \frac{\pm kv}{2y\sqrt{\left(1 + \frac{k}{4x}\right)}}, \qquad (12)$$

$$\dot{y} = \frac{\pm kv}{2\sqrt{kx\left(1+\frac{k}{4x}\right)}}. \tag{13}$$

Konečný vektor rychlosti $\vec{v}$ zapíšeme ve tvaru:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\pm v}{\sqrt{\left(1+\frac{k}{4x}\right)}} \\ \frac{\pm kv}{2\sqrt{kx\left(1+\frac{k}{4x}\right)}} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Poslední kinematickou veličinou kterou nám zbývá určit je vektor zrychlení $\vec{a}$ se složkami $\ddot{x}$ a $\ddot{y}$. Složku zrychlení $\ddot{x}$ určíme z časové derivace rovnice (10) (nezapomínejme, že dle zadání je $v = konst.$).

$$0 = 2\dot{x}\ddot{x}\left(1+\frac{k}{4x}\right) - \dot{x}^2\frac{k}{4x^2}, \tag{15}$$

$$\dot{x}\frac{k}{8x^2} = \ddot{x}\left(1+\frac{k}{4x}\right), \tag{16}$$

$$\frac{\dot{x}k}{8x^2\left(1+\frac{k}{4x}\right)} = \ddot{x}. \tag{17}$$

Časovou derivací rovnice (5) získáme závislost mezi $\ddot{x}$ a $\ddot{y}$.

$$2\dot{y}^2 + 2y\ddot{y} = k\ddot{x}, \tag{18}$$

$$2y\ddot{y} = k\ddot{x} - 2\dot{y}^2, \tag{19}$$

$$\ddot{y} = \frac{k\ddot{x} - 2\dot{y}^2}{2y}, \tag{20}$$

$$\ddot{y} = \frac{k\ddot{x} - 2\dot{y}^2}{2y}. \tag{21}$$

Postupným dosazením z předchozích vztahů do rovnic (17) a (20) bychom získali hledanou závislost $\ddot{x}(x)$ a $\ddot{y}(x)$.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\dot{x}k}{8x^2\left(1+\frac{k}{4x}\right)} \\ \frac{k\ddot{x}-2\dot{y}^2}{2y} \end{pmatrix}. \tag{22}$$